Academy of Mathematics and Systems Science
Chinese Academy of Sciences
Name: 李夏洋
Major: 运筹学与控制论
UID: 202328000206057
Personal Page: `https://xiayangli2301.github.io`

Apr. 28, 2024
Assignment

Combinatorial Optimization(组合最优化)-Homeworks 3

Question 1

在一般的原始-对偶算法中，为什么要求 $b > 0$?

Solution. 由于限制的原问题为如下形式:

$$\begin{aligned} \min\ & \xi = \sum_{i=1}^{m} x_i^a \\ \text{s.t.}\ & \sum_{j\in J} a_{ij}x_j + x_i^a = b_i, i = 1, 2, \cdots, m \\ & x_j \geqslant 0, j \in J \\ & x_j = 0, j \notin J \\ & x_i^a \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, m \end{aligned} \tag{RP}$$

限制条件要求变量 $x_i^\alpha \geqslant 0$，此时显然 $x_j = 0, j \in J$, $x_i^\alpha = b_i$ 是可行解. 如果不要求 $b_i \geqslant 0$, 则在求解 (RP) 中难以保证可行解的存在性.

习题课答案

求解 (BP) 问题, 利用单纯形算法. 需要从基可行解开始, 始终保持基的可行性.

$$x = B^{-1}b := I^{-1}b \geqslant 0$$

Question 2

证明在原始-对偶算法中，每一次迭代，对偶可行解的费用都增加一个正的数量。并说明这一事实为什么不能像单纯形算法那样，推出算法在有限步内结束?

Solution. 根据强对偶定理, (RP) 问题和 (DRP) 问题有相同的最优值. 由于 $\xi_{\text{opt}} > 0$(否则算法已经终止), 故 $w_{opt} = \max_{\overline{y}} b^\top \overline{y} > 0$. 故 $b^\top y^{(t+1)} = b^\top (y^{(t)} + \theta\overline{y}) = b^\top y^{(t)} + \theta b^\top \overline{y} > b^\top y^{(t)}$. 于是得证对偶可行解都增加一个正的数量. 但这样并不能保证算法在有限步结束 (正向级数并非都是发散的). 在单纯形法中, 能够推出有限步内结束是因为单纯形每次得到的迭代点都是单纯形的

顶点, 而单纯形的顶点总是有穷的.

Question 3

证明在最短路原始-对偶算法中，对于 $i \in W$,y_i 是自 i 到 t 的最短路长度; 并且每一阶段加到 W 里的节点是最靠近 t 的非 W 中的节点.

Proof. 由于原始对偶算法每一步迭代总保持对偶问题的可行性, 于是每步迭代, $(y_v)_{v\in V}$ 都是可行势. 于是, 对于 $\forall i \in W$, i 到 t 的距离 $C(P)$ 满足:

$$C(P) \geqslant y_i \tag{1}$$

但是, 由于 $i \in W$, 故利用饱和弧中的边可以使得 i 与 t 有路相连, 即我们可以找到一条由 i 通向 t 的路 P^*, P^* 的每一条边都是饱和弧. 这说明 $C(P^*) = y_i$. 结合式 (1) 得, P^* 是 i 到 t 的一条最短路, y_i 是 i 到 t 的最短路长度.

在某步迭代过程中, i 加入 W, 对于任意没有加入 W 的节点 j . 此时, 由原始对偶算法 $y_i = y_j$. 但由可行势条件,

$$C(P) \geqslant y_j = y_i, P \text{ 是所有从}j\text{到}t\text{的有向路.} \tag{2}$$

这说明, i 到 t 的最短路长度不超过 j 到 t 的最短路长度.

助教给的参考答案, 此题第二问没有证清楚.

Question 4

证明在最大流的原始-对偶算法中，计算 θ 相当于沿增广路增加的流值，直到某一条弧被饱和。

Solution. 该题目有问题. 事实上计算 θ 得到的结果是: 尽可能地增加流值, 增加到某一后向弧的流值为 0，或者某一前向弧为饱和弧. 由 θ 的计算公式:

$$\begin{aligned}\theta &= \min\begin{cases}\min\limits_{\substack{f(i,j)<b(i,j)\\ (i,j)\in P \text{ 为前向弧}}} \{b(i,j) - f(i,j)\}, \\ \min\limits_{\substack{f(i,j)>0\\ (i,j)\in P \text{ 为后向弧}}} \{\frac{0-f(i,j)}{-1}\}\end{cases} \\ &= \min_{(i,j)\in P}\begin{cases} b(i,j) - f(i,j), (i,j) \text{ 为 } P \text{ 的前向弧} \\ f(i,j) \text{ 为 } P \text{ 的后向弧.}\end{cases}\end{aligned} \tag{3}$$

若 $\theta = b(i^*, j^*) - f(i^*, j^*)$, 即 θ 在前向弧取到, 则该前向弧对应的新的可行解满足:

$$f(i^*, j^*) := f(i^*, j^*) + b(i^*, j^*) - f(i^*, j^*) = b(i^*, j^*).$$

即其被饱和.

同样, 若 $\theta = f(i^*, j^*)$, 即 θ 在后向弧取到, 则该后向弧对应的新的可行解满足:

$$f(i^*, j^*) := f(i^*, j^*) - f(i^*, j^*) = 0.$$

即其流值变为 0 .

Question 5

在点-弧形式的最短路问题里，如果允许弧的权为负值，证明下述条件是等价的:

1. 存在最短的 s–t 路。
2. 其对偶规划有可行解。
3. 没有负费用的回路。

Solution.: “(1) ⇒ (2)”: 原始问题有最优解则对偶规划有可行解. (1) ⇒ (2) 显然.

“(2) ⇒ (3)”: 假设有负费用的回路, 取出这条回路, 在对偶规划中, 有子系统需满足如下条件:

$$\begin{aligned} y_{i_1} - y_{i_2} &\leqslant c_1 \\ y_{i_2} - y_{i_3} &\leqslant c_2 \\ &\cdots \\ y_{i_p} - y_{i_1} &\leqslant c_p \end{aligned} \tag{4}$$

负费用的回路说明:

$$\sum_{i}^{p} c_i < 0$$

这说明满足子系统 (4) 约束的集合是空集. 也即, 对偶规划没有可行解.

“(3) ⇒ (1)”: 设问题实例中包含 n 个顶点. 断言: 对于任意一条含边数 $l(P) \geqslant n$ 的 $s-t$ 路 P, 总能找到一条 $s-t$ 路 P', P' 包含的边数 $l(P') \leqslant n-1$, 且 $C(P') \leqslant C(P)$. 若不然, 则必然存在 $u \in V$, u 在 P 中出现了至少两次. P 中包含了一条覆盖 u 的回路. 由于没有负费用的回路, 因此, 去掉该回路, 不影响 s 到 t 的可达性, 且费用没有增加. 依此操作, 可以去掉 P 中的所有回路. 所以, $\inf\limits_{P\text{是 } s-t \text{ 路}} \{C(P)\} = \inf\limits_{\substack{P\text{是 } s-t \text{ 路} \\ l(P) \leqslant n-1}} \{C(P)\}$. 而等式右边可行集

$$\{P\text{是 } s-t \text{ 路}, l(P) \leqslant n-1\}$$

是有限集, 故一定可以找到最短的 $s-t$ 路.

助教给的参考答案证明更加简洁. 仅列不同.

“(2) ⇒ (3)”: 若有负费用有向圈 ⇒ 原问题最优解无下界 ⇒ 对偶不可行, 矛盾!

“(3) ⇒ (1)”: 若无负费用有向圈 ⇒ 则不含圈的 $s-t$ 路费用不大于含圈的 $s-t$ 路费用. 另外,

不含圈的 $s-t$ 路共有有限多条, 则一定存在最短 $s-t$ 路.