Academy of Mathematics and Systems Science Apr. 6, 2024
Chinese Academy of Sciences Assignment
Name: 李夏洋
Major: 运筹学与控制论
UID: 202328000206057
Personal Page: `https://xiayangli2301.github.io`

组合最优化第四次作业

Question 1

给出最大流的原始规划中的变量 $\pi(x)$ 和 $\gamma(x,y)$ 的一种合理解释

Solution. 网络 $N=(s,t,V,E,b)$ 的一个 $s-t$ 截是节点集合 V 的一个划分 $(W,\overline{W})$ 划分. 最大流与最小割问题互为对偶.

这样, $\pi(x)=0$ 表示 $x\in W$, $\pi(x)=1$ 表示 $x\in\overline{W}$.

$\gamma(x,y)=1$ 表示 xy 是割, 也即 $x\in W$, $y\in\overline{W}$.

Question 2

设 $N=(s,t,V,E,b)$ 是有向图 $G=(V,E)$ 上的一个流网络, $P=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_K}\}$, 是节点 v_i 到节点 v_j 一条有向路, 记 $b(P)=\min\{b(e_{i_m}):m=1,2,\cdots,K)$, 称 $b(P)$ 为有向路 P 的容量。设计一个计算复杂度为 $O(|V|^3)$ 的算法, 求出网络 $N=(s,t,V,E,b)$ 中所有节点对之间的最大容量的路。

Solution. 可以使用 Dijkstra 算法的思路, 设计算法如下.

1. 依次选择图 G 中的点 s 作为源点. 用二元组储存每个节点 v 的信息.$(\varepsilon(v),b(s,v))$, 其中 $\varepsilon(v)$ 为其上一节点的编号, $b(s,v)$ 表示从源点 s 到 v 的有向路的容量. 设初始化源点 $\varepsilon(s)=\emptyset,b(s,s)=\infty)$, 其余节点 $\varepsilon(v)=\emptyset,b(s,v)=-\infty)$.
2. 取出 $b(s,v)$ 值最大的节点作为当前节点 s'. $V:=V\setminus s'$, 考察 s' 的所有邻居节点. 若 $b(s,v)<\min\{b(s,s'),e_{s',v})\}$, 则记 $b(s,v):=\min\{b(s,s'),e_{s',v})\}$.
3. 若 $V\neq\emptyset$, 转上步; 否则, 退出程序. 输出 $b(s,v),v\in V$, 为源点 s 到 v 的最大容量的路的容量.

算法对于某一个源点 s 需要遍历 $|V|$ 个顶点, 更新每个顶点至多 $|V|$ 个邻居, 因此找到 s 到其余各个顶点的最大容量路需要时间复杂度为 $O(|V|^2)$, 遍历 $|V|$ 个顶点需要的时间复杂度为 $|V|)$, 于是算法的计算复杂度为 $O(|V|^3)$

Question 3

假设有 n 个男青年和 n 个女青年及 m 个婚姻介绍所. 每一个婚姻介绍所掌握一批男青年和女青年的登记名单, 并且它可以按照名单任意安排男女之间的婚配. 假设第 i 个婚姻介绍所能够安排的最大婚配数为 b_i ,$i = 1, 2, \cdots, m$. 要求一夫一妻且不允许同性恋. 设计一个算法求出最大婚配.

Solution. 构建一个虚拟的无穷大源点 s, s 向 m 个婚姻介绍所连 m 条边, 每边 (s, i) 容量限制为 b_i.

每个婚姻事务所向每个男青年之间连边, 边容量限制为 1, 每个男青年和每个女青年之间连边, 边容量限制为 1. 每个女青年向一个无穷收点 t 连边, 边容量限制为 1. 于是调用求解 s 到 t 的最大流问题的算法即可求解该问题.

Question 4

Ford-Fulkerson 标号算法是原始-对偶算法在最大流问题中的应用，但原始-对偶算法在有限步内终止，而 Ford-Fulkerson 标号算法却不能，矛盾吗? 为什么?

Solution. 首先, 原始对偶算法我更愿意称它为方法，脱离具体问题谈一个比较通用的方法是否有限步终止没有任何意义. 题设:'原始-对偶算法在有限步内终止' 在表达什么?. Ford-Fulkerson 标号算法之所以不能在有限步终止, 是因为它寻找增广路的方法并不充分恰当, 是随机增广的. 只能确保当前步的流值比上一步大, 即, 流值列严格单增. 但构造一个严格递增但极限存在的数列是很容易的. 需要指出的是, 讲义 5.3 节呈现的 'Ford-Fulkerson 标号算法' 出现了很严重的错误, 那根本不是 Ford-Fulkerson 标号算法, 事实上讲义上的那个版本等价于 EK 算法, 完全可以证明有限终止性.

郭老师的讲义, 一定要带着批判思想去看哦.

下面罗列助教的答案, 也有道理.

不矛盾, 原始对偶算法利用单纯形算法求解子问题, 且采用避免蕴含的方法, 有限步可以终止.

但 Ford-Fulkerson 算法没有用单纯形方法求解子问题, 也没有避免环的方法, 因而出现无理数时就可能在有限步不终止.

Question 5

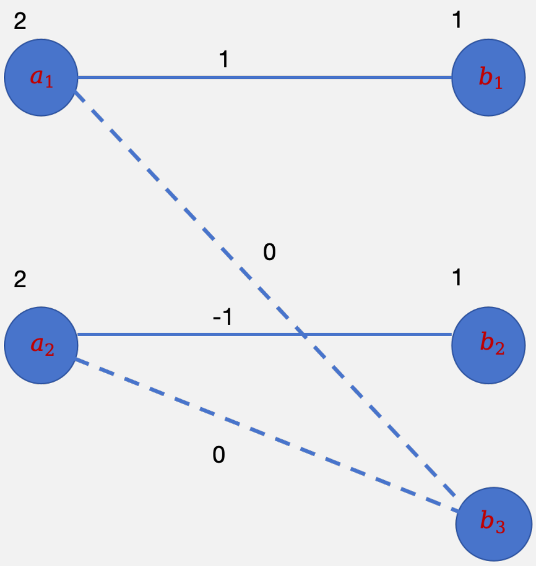
为什么把 Hitchhock 问题变为等式约束时, 要依赖于费用的非负性? 考察圈算法, 迭加算法和 $\alpha\beta$ 算法对这个假设的依赖性.

Hitchcock 问题的不等式约束是由于供大于需引起的.

其线性规划模型为:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i,j} c_{ij} f_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \leqslant a_i, i = 1, 2, \cdots, m \\
& \sum_{i=1}^{m} f_{ij} \geqslant b_j, j = 1, 2, \cdots, n \\
& f_{ij} \geqslant 0
\end{aligned}
$$

这样可构造反例如下.



显然, 不增加虚拟节点时, 最优解为 $f_{11} = 1$, $f_{22} = 2$. 增加虚拟节点后 $f_{11} = 1, f_{13} = 1, f_{22} = 1, f_{23} = 1$. 于是最优解发生了变化.

(2) 三种算法都不依赖于该假设. 圈算法本质为寻找负费用有向圈, 没有影响. 迭加算法本质为寻找最小费用增广路, 也没有影响. $\alpha\beta$ 算法, 默认为等式约束情形, 不依赖.

Question 6

Hitchcock 问题 $\alpha\beta$ 算法的有限步终止吗? 为什么?

Solution. Hitchcock 问题的 $\alpha\beta$ 算法依赖于 Ford-Fulkerson 标号算法. 故如果 Ford-Fulkerson 标号算法可以有限步终止, 则 Hitchcock 必然可以有限步终止, 因为每一次调用 Ford-Fulkerson 之后, 对偶问题值都会上升, 这意味着每次允许弧集合是不同的. 由于弧集有限, 故原始对偶算法的子问题是有限的, 于是其可以有限步终止.